EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Arturo Arellano Rosario, Mayra Solana Sagarduy
Universidad Autónoma de Guerrero. México
arellano127@yahoo.com.mx, mayra_ss@yahoo.es
Campo de investigación: Enseñanza problémica, Tecnología en la Educación Superior Nivel: Superior

Resumen. *Es tradicional que en cualquier carrera universitaria, a los estudiantes de cálculo se les expongan una diversidad de definiciones y teoremas con un significado matemático preciso y que han sido elaborados durante años por muchos matemáticos, pero los estudiantes, encuentran las logran asimilar, ni comprender. Aquí es donde adquieren importancia las nuevas tecnologías de la computación, que junto con la enseñanza problémica permiten diseñar experiencias en las cuales está presente la noción del cálculo, logrando así desarrollar el pensamiento creador de los estudiantes. En este trabajo mostramos la experiencia obtenida en una investigación que desarrollamos con un grupo de estudiantes de Cálculo I en la Unidad Académica de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero y mostramos algunas de las prácticas realizadas.*

Palabras clave: enseñanza problémica, tecnología en la educación

Introducción

En este trabajo resumimos parte del proyecto de investigación que estamos desarrollando con un grupo de estudiantes de Cálculo I en la Unidad Académica de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero. En el mismo mostramos algunas de las prácticas realizadas y damos conclusiones parciales.

Como es por todos conocido, uno de los grandes problemas de la educación en todos los países es el concerniente a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El desarrollo de capacidades, como la de construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones, no se propicia en las aulas de las carreras de matemática a pesar de ser una de las principales competencias planteadas en el proyecto Tunning para Latino América.

Las definiciones y conceptos fueron el resultado de un proceso que se produjo a través del tiempo y conforman una rigurosa cadena ordenada de proposiciones lógicas y símbolos, que tienen un significado matemático preciso. Pero los estudiantes, en general, encuentran las definiciones matemáticas formales tan comprimidas y exactas que no las pueden manipular, ni asimilar, ni comprender fácilmente (De la Torre, 2002). Esto podría deberse a que la manera en que se explica la matemática tradicionalmente se ha visto privilegiaba la adquisición de un cuerpo de conocimientos ya construido, donde los estudiantes han tenido poco o ningún contacto con el aspecto experimental e investigativo de la actividad matemática. Pero el gran avance de la computación y el amplio desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC´s), a finales del siglo pasado, permitió el desarrollo de equipos de cómputo, herramientas de programación y aplicaciones con gran potencial, que por su rapidez y facilidad de uso, abrieron enormes posibilidades de aplicación en todos los campos de la actividad humana, donde los recursos informáticos y tecnológicos facilitan la simulación de situaciones problémicas reales y actualizadas, las cuales concretan la aplicación de la matemática en sus diferentes esferas, contribuyendo al fortalecimiento de valores y el desarrollo multilateral del estudiante (Lujan y Pochulu, 2006).

La investigación educativa en matemática está ligada al desarrollo del pensamiento crítico y creador de los estudiantes, que se manifiesta como proceso de búsqueda, elaboración de hipótesis, razonamientos, emisión de juicios, etc. Pero la mayoría de los alumnos no está preparada para hacer conexiones y entender el valor y el sentido de lo que se les enseña (CORD Communications, 2003).

A pesar de que nuestros alumnos necesitan entender conceptos matemáticos para poder desempeñarse bien en sus trabajos y en la sociedad en que viven y trabajan, la mayoría tiene dificultad para entender dichos conceptos y teoremas tal como se los enseña habitualmente. Entonces ¿Cuál es la mejor manera de transmitir la gran cantidad de conceptos que se enseñan en una clase, para que todos los alumnos puedan retener y utilizar esa información? ¿Cómo se pueden visualizar mejor los distintos temas a enseñar y que son como piezas interconectadas que se agregan a lo que ya sabe el alumno? ¿Cómo puede un profesor comunicarse con sus alumnos cuando éstos preguntan acerca del por qué, del significado y de la pertinencia de lo que están estudiando? ¿Cómo podemos abrir las mentes de nuestros alumnos para que aprendan técnicas de aprendizaje que les proporcionarán a muchas oportunidades a lo largo de sus vidas? De aquí surge esta pregunta: ¿Se podría, con ayuda de las TIC's, lograr que el estudiante sea capaz de hacer conjeturas que los acerque a los métodos de trabajo científico llevándolos a plantear y resolver teoremas en la asignatura de Cálculo I?. Estas son algunas de las cuestiones que podrían plantarse los docentes al enseñar el cálculo, aunque las respuestas son difíciles de encontrar.

El marco teórico en que se inserta esta investigación es, por una parte, la enseñanza problémica, buscando un acercamiento del estudiante a los métodos de trabajo de investigación científica y, por otra, las ideas aparecidas en la literatura sobre la utilización de la computadora en la enseñanza para, con apoyo en la visualización, contribuir al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Para esto se hace uso del software matemático The Geometer's Sketchpad como apoyo, para que por medio de la observación, manipulación de gráficas, y elaboración de conjeturas nos permita explorar, desde una óptica didáctica, conceptos avanzados relacionados con el cálculo.

Metodología

En este trabajo, exponemos algunas experiencias de investigación en matemáticas llevadas a cabo con el software matemático *The Geometer's Sketchpad*, el cual deja las puertas abiertas para la creación de nuevos conocimientos en la disciplina, fortaleciendo el potencial de los estudiantes y favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

El trabajo con los estudiantes se llevará a cabo en dos etapas para cada actividad: primero, mediante imágenes gráficas previamente diseñadas utilizando el software matemático, se les permitirá la manipulación libre de las mismas. Dichas imágenes gráficas están enfocadas en la búsqueda del desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes, y a un mejoramiento significativo, en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones que permitan a los estudiantes continuar aprendiendo dentro de un medio científico haciéndose cuestionamientos claves dentro de la materia a estudiar. En especial, se busca el fortalecimiento de los procesos mentales que se dan en los alumnos en el momento en que estos deben desarrollar en sus propias mentes las ideas y herramientas matemáticas, de modo que adquieran un nivel avanzado de razonamiento que permita superar con eficiencia los distintos obstáculos asociados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia.

Después, por medio de preguntas se les guiará hasta lograr que por sí mismos enuncien el teorema sobre el que estemos trabajando, permitiendo la discusión sobre si las condiciones son necesarias y/o suficientes, cambiando, quitando o agregando hipótesis. Estas preguntas se basan en la observación del movimiento de los distintos objetos gráficos que se les presentan a los estudiantes en las actividades.

Estas actividades formarán parte del curso de Cálculo I, utilizando como texto el libro de Cálculo de Spivak, M. (1999), y los teoremas en cuestión serán formalizados y demostrados posteriormente en clase.

Resultados

Nuestro objetivo principal es que en el marco de la enseñanza problémica y mediante la manipulación de gráficas en la computadora debidamente diseñadas para las actividades, los alumnos logren concluir las hipótesis de los distintos teoremas y conceptos que se encuentran al estudiar el cálculo. Una buena parte del trabajo consiste en elaborar las actividades, desde el diseño y creación de las gráficas hasta el planteamiento de preguntas debida y oportunamente formuladas por el guía (profesor).

Las gráficas se construyeron de manera que fueran interactivas, animadas y significativas buscando que facilitaran el estudio y comprensión de las propiedades matemáticas del cálculo. Al inicio, en lo que llamamos primera fase, se trabajó con actividades de introducción para que los estudiantes se familiarizaran con el software y con la metodología que íbamos a utilizar en clase. En esta fase se utilizaron conceptos "conocidos" por los estudiantes como el concepto de dominio, límite y continuidad.

Los resultados parciales obtenidos hasta ese momento, nos llevó a seguir pensando que trabajando de esa manera se podía lograr propiciar la realización, por parte del estudiante, de conjeturas y dar proposiciones, y generalizaciones despertando así su interés y participación en su trabajo escolar, provocando además el desarrollo del pensamiento creador y un mejoramiento significativo en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones permitiéndoles continuar aprendiendo dentro de un medio científico, haciéndose cuestionamientos claves dentro de la materia a estudiar, y en especial, fortaleciendo de los procesos mentales que se dan en el momento de desarrollar en sus propias mentes las ideas y herramientas matemáticas.

Centramos la segunda fase en que los estudiantes pudieran encontrar las condiciones necesarias y/o suficientes para enunciar teoremas. Por medio de preguntas problémicas se les guió en la búsqueda de estos resultados.

Uno de los teoremas estudiados fue el teorema de Rolle (Spivak, 1999)

Para trabajar este teorema se les planteó a los estudiantes la búsqueda de condiciones que permitieran determinar si la derivada de una función se anula en algún punto de un intervalo dado. Es decir, se intentaba la búsqueda de condiciones suficientes para garantizar que en un punto del intervalo la función tuviese una tangente horizontal.

Se le presentaron distintas situaciones creadas con el Geometra y que el estudiante pudo manipular dándole movimiento a los puntos.

1 La función era continua, tomaba los mismos valores en los extremos del intervalo, pero no era derivable en el punto de mínimo. El alumno dio moviendo pero no encontró ningún punto donde la derivada fuese cero. (Figura 1)

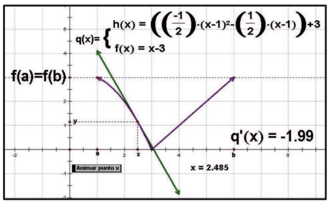


Figura 1

2. La función era continua en el cerrado y derivable en el abierto, pero los valores en los extremos no coincidían. Para esta situación se le presentaron dos casos, uno en que sí había un punto donde la derivada se anulaba (Figura 2) y otro donde no (Figura 3), buscando que el estudiante se diera cuanta de que si la función era continua en el cerrado, derivable en el abierto pero los valores en los extremos no coincidían, simplemente no podíamos garantizar que existiera un punto donde se anulara la derivada.

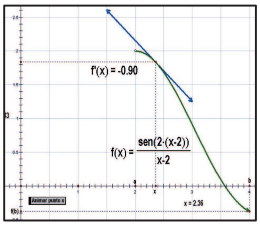


Figura2

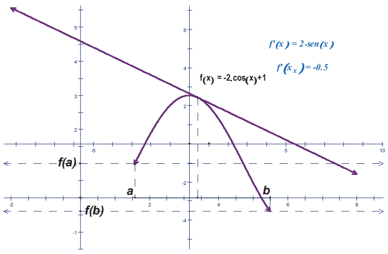


Figura 3

3 Un caso similar lo teníamos si la función no estaba definida en los extremos del intervalo.

Las mismas graficas sirvieron para ilustrar, solo que quitándole alguno de los valores de los extremos del intervalo. (Figuras 2 y 3).

4. Otro caso que se les planteó fue, dada una función que no fuera continua en el intervalo pero que sí tomara valores iguales en los extremos. Aquí también se pretendía que vieran que no se podía afirmar nada sobre si hay o no un punto donde se anulara la derivada. (Figuras 4 y 5).

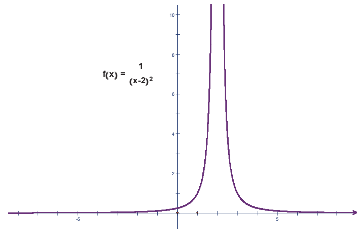


Figura 4

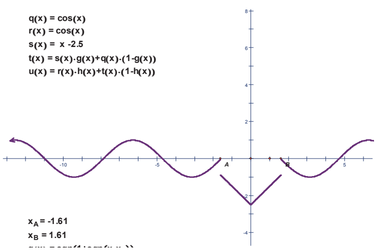


Figura 5

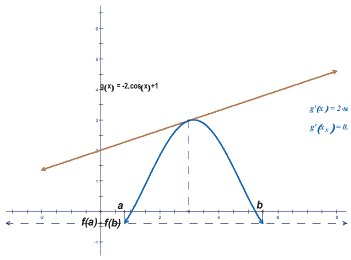
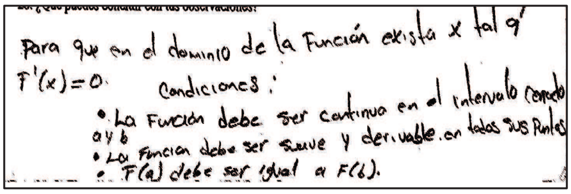


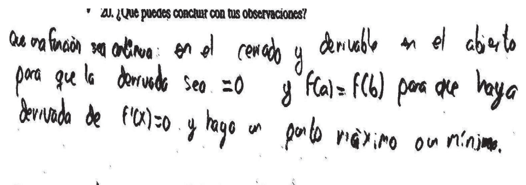
Figura 6

Finalmente se les planteó el caso de en que sí se cumplían las 3 condiciones. (Figura 6)

Posteriormente, se le pidió a los estudiantes que escribieran sus conclusiones



Para que en el dominio de la Función exista x tal q' F'(x) = 0.
Condiciones:
• La Función debe ser continua en el intervalo cerrado a y b
• La Funcion debe ser suave y derivable en todos sus Puntos
• F(a) debe ser igual a F(b).



20. ¿Que puedes concluir con tus observaciones?

Que una función sea continua en el cerrado y derivable en el abierto para que la derivada sea = 0 y F(a) = F(b) para que haya derivada de F'(x) = 0 y haya un punto máximo o un mínimo.

Como se pudo observar, al final de la actividad y llegado el momento de conjeturar con lo observado y analizado en las gráficas del software, los estudiantes dieron un buen acercamiento al teorema. Posteriormente, en la conferencia el profesor retomó las "conjeturas" hechas y con ayuda de una lluvia de ideas se formalizó el teorema pasando posteriormente a su demostración.

Con nuestra experiencia en clases pudimos notar que el pensamiento creador de los estudiantes aumenta significativamente cuando ellos "ven" el por qué están aprendiendo esos conceptos y cómo se pueden usar los mismos para resolver problemas que trascienden el ámbito del aula. La mayoría de los alumnos aprende mucho más eficientemente cuando se le permite trabajar en equipos compartiendo problemas y soluciones entre ellos.

Discusión

El trabajo de laboratorio es esencialmente cooperativo. En este tipo de actividades, los alumnos trabajan con otros compañeros y para la realización de las mismas necesitarán delegar, observar, sugerir y analizar.

El trabajo más difícil para el profesor es impedir que el alumno active las distintas herramientas del software y se ponga a crear dibujos que no conviene para nuestros propósitos. Afortunadamente el software utilizado en esta investigación permite ocultar algunas de las herramientas para que no estén a disposición del alumno en este archivo (en este caso ocultaríamos la caja de herramientas) y así trabajen encaminados únicamente a la actividad.

Como es tradicional en la enseñanza del cálculo en las distintas carreras universitarias, en el momento en que el maestro dicta a sus alumnos los conceptos y teoremas, el problema habrá acabado sin pena ni gloria para el estudiante sin darle la oportunidad de mostrar sus capacidades para desarrollar su razonamiento matemático. Si, por el contrario, el alumno se dedica a pensar en la figura que se obtiene al cambiar los parámetros de las gráficas de las funciones, analiza distintas posibilidades, observa, manipula las gráficas y explica por qué se da ese concepto como resultado, intenta convencer (demostrar) a sus compañeros de por qué va a ser con otras condiciones e hipótesis se puede lograr que los conocimientos adquiridos sean más sólidos.

La comprensión de estos conceptos y teoremas involucran distintos aspectos, entre los cuales se destaca la historia del concepto, los objetos geométricos y la visualización que permiten concebir dicho concepto, los obstáculos que los alumnos enfrentan al abordarlo y la relación entre el concepto-imagen y el concepto-definición, que debe lograrse para su plena comprensión. Los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, como los de derivada e integral, se valen de los conceptos del cálculo para formalizar otros, aún más abstractos, que con frecuencia desembocan en conocimientos más profundos y refinados (De la Torre, 2002).

Conclusiones

Hoy en día con los nuevos recursos tecnológicos, se pueden realizar actividades abiertas e innovadoras que despierten interés en los alumnos, y que concluyan en una verdadera investigación matemática, donde el estudiante descubra y construya conocimientos, pudiendo llegar a ser temas no explorados aún por sus propios docentes.

A partir de los resultados parciales obtenidos, pensamos que el uso de los nuevos recursos brinda un importante apoyo en la labor de investigación en matemática, principalmente porque permiten: a) Formulación de hipótesis de trabajo, b) Comprobación de estas hipótesis, c)Elaboración de conjeturas y formulación de contraejemplos, d) Elaboración de complicados y tediosos cálculos algebraicos. (Adell, 1997).

En este sentido, pensamos que es muy importante generar en clases situaciones significativas, que "intriguen" al alumno motivándolo a estudiar e impidan que el olvido llegue tan fácilmente.

Las investigaciones que aparecen redactadas en múltiples revistas científicas revelan, que en matemáticas el trabajo de los estudiantes en un ambiente con computadoras es cualitativamente superior al tradicional.

En este trabajo, se hemos podido verificar tales afirmaciones, es decir, que los alumnos van más allá de los computadores programáticos, formulando conjeturas, acuñando definiciones, haciendo demostraciones, proponiendo y resolviendo problemas. El ambiente computacional es particularmente propicio para la exploración de un tópico matemático, el cual les lleva a proponer conjeturas y a "descubrir" relaciones matemáticas.

También podemos concluir que las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático.

En consecuencia, estratégicamente utilizados, los nuevos recursos tecnológicos pueden provocar en los estudiantes sensaciones de capacidad, confianza en sí mismos e interés por adquirir los nuevos conocimientos que le permitan corroborar lo descubierto y explicar teóricamente su causa.

En el terreno de la matemática escolar básica, el uso de la calculadora y de software educativo, han proporcionado a los educadores ambientes de experimentación y nuevas metáforas para comunicar ideas matemáticas. Así, hoy en día es posible diseñar actividades de aprendizaje en los distintos escenarios del cálculo, los cuales llegan a ser apropiados para que el alumno confronte rápidamente problemas no triviales -pero tratables en su nivel- efectuando la exploración detallada de ejemplos paradigmáticos, busque contraejemplos y lleve a cabo una experimentación sistemática con el auxilio de modelos concretos.

Los software matemáticos son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas. El problema es que en muchos casos, basta con una acción de ratón para que se desvelen todas las propiedades de la figura y ya no haya que pensar más: la imagen es muy poderosa y nos convence.

Con frecuencia, la secuencia de trabajo en una clase de matemáticas es: *Haz, discute, descubre.* D. Fielker (citado en Mora, 2007) en su libro Rompiendo las cadenas de Euclides, propone hacer permutaciones de estos términos según la tarea que queramos proponer a los estudiantes.

Cuando el alumno piensa de antemano en la situación, planifica y analiza las distintas posibilidades, puede imaginar lo que va a ocurrir, entonces la secuencia correcta podría se *Discute, haz, descubre* si lo que necesita es realizar un trabajo práctico antes de emitir hipótesis. Aún más interesante sería: *Discute, descubre, haz* cuando lo que se quiere es que emita su hipótesis y después confirme o refute sus conjeturas (Mora, 2007).

Referencias bibliográficas

Adell, J. (1997). *Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información*. Extraído el 20 de diciembre de 2007 desde http://www.uib.es/depart/gte/revelec7.html

CORD Communications. (2003). *Enseñanza Contextual de Matemática, Piedra Angular del Cambio de Paradigmas.* Extraído el 25 de septiembre de 2007 desde http://www.cord.org/uploadedfiles/Ensenanza%20Contextual%20de%20Matematica.pdf

De la Torre, A. (2002). *Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Extraído el 8 de agosto de 2007 desde http://matematicas.udea.edu.co/~edumath/LINKS/presentacion.htm

Lujan, M. y Pochulu, M. (2006). *4° Jornada de Informática y Educación: El rol de los nuevos recursos en la investigación educativa en matemáticas.* Extraído el 15 de septiembre de 2007 desde http://jornadaie.unvm.edu.ar/pon15.pdf

Mora, J. A. (2007). *Geometría dinámica en secundaria.* Extraído el 20 de septiembre se 2007 desde http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf

Spivak, M. (1999). *Cálculus, cálculo infinitesimal.* México: REVERTÉ